

Câu 1: (4 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức:

$$M = (x^9 + x - x^{2020})^{2021} \text{ với } x = \frac{(27 + 9\sqrt{10}) \cdot \sqrt[3]{37\sqrt{10} - 117}}{\sqrt{10} + \sqrt{91 - 18\sqrt{10}}}.$$

b) Rút gọn biểu thức:

$$N = \frac{1}{1 + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21} + \sqrt{31}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2021}}$$

Câu 2: (3 điểm)

Cho 3 số x, y, z không âm đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{y} - \sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{y} - \sqrt{z}} \cdot \frac{\sqrt{z} + \sqrt{x}}{\sqrt{z} - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{z} + \sqrt{x}}{\sqrt{z} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = -1.$

Câu 3: (6 điểm)a) Giải phương trình: $\sqrt{6x^2 - 7x - 20} + 3\sqrt{2x - 5} - 2\sqrt{3x + 4} - 6 = 0.$ b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa $x + y + z = 2.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2}{x} + \frac{8}{9y} + \frac{18}{25z}.$ c) Cho phương trình: $x^3 + (2m - 5)x^2 + (m^2 - m + 7)x - m^2 - m - 3 = 0$ (m là tham số)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm dương phân biệt.

Câu 4: (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại C. Kẻ đường cao CD, đường phân giác CE của góc ACD và đường phân giác CF của góc BCD. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số diện tích giữa

tam giác ABC và tam giác CEF. $\left(\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} \right)$ **Câu 5: (3 điểm)**

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ các đường cao BD và CE. Chứng minh: DE vuông góc OA.

----- Hết -----